

# 非線形を手なずけて

On Purpose to Tame Nonlinearity

引原隆士



非線形な力学系は限られた場合にしか厳密解が得られないが、多数の解の共存と多様性から、その性質に対する理解に興味を持たれてきた。工学では厳密な表現で議論できることが操作性、有用性、汎用性につながるとの認識から、ミクロからマクロまで、線形化に基づくシステム設計が積み上げられ、非線形性が発現する領域における議論は可能な限り避けられる傾向にある。本来、工学は完成された理論が通じる領域で閉じた学問ではなく、あえて理論的裏付けのない未開の境界領域に踏み入り、地ならしし、そこに種を見つけ樹木として育てたのち、果実を得る学問である。その意味で、非線形性に対峙するのではなく、必要に応じて手なずけることが、工学がなすべき挑戦である。非線形を手なずけるとは、非線形系の持つ性質について原点に戻って理解し、確認した上で、それらの非線形性を用いた新たな機能を生み出すことをここでは意味するものとする。以下、筆者が携わってきた研究の周辺から、解析と統合の観点に立脚し、目指すべき方向性について述べる。

キーワード：非線形性、平衡点、スケール、共存、回帰性、局在、散逸、還元論、保存系

## 1. はじめに

自然の系はことごとく非線形性を示し、ミクロに見れば無限の要素が複雑に絡み合った系である。したがって、あえて非線形という必要もなく、それ自体が当たり前である。しかし、我々は使える眼鏡、物差しでしか対象を見ることができないため、解析的に扱い切れない特性は無視して単純化し、厳密な議論の完成を目的としたアプローチの方をより明解と尊重する傾向がある。マクロな系を還元論により要素やモードに分割し、各要素から物理的特性の理解につなげることに解析の妙味がある。一方で、工学の研究は解析（アナリシス）から統合（シンセシス）のフェーズに移っている<sup>(1)</sup>。その潮目が1990年代の中頃であったと言われている。アナリシスへの期間を長期にわたって経た後、周辺分野も含めた科学技術の理解が相乗的に進み、現在はシンセシスの価値が高まっている。

単純な非線形系のモデルにおいてもパラメータに応じ

て多様な解が存在し、解が初期値から時間発展して定常に至る過渡において、共存する他の解の影響を受ける。その結果、解は時間とともに空間において複雑な挙動を示す。この状態を分析して分解するのではなく、解析に基づく理解から、解を手なずけて利用する方法を見いだす、あるいは非線形性を設計に取り入れることが重要である。このような非線形系のシンセシスに向けた方法論こそが、21世紀の科学技術の鍵を握っている。

## 2. 非線形現象の解析に基づいて

### 2.1 現象の普遍性

非線形現象を象徴するカオスは、その発見と認知の過程<sup>(2)</sup>からは想像できないが、今では至る所で見いだされる自然現象である。その存在が認知されるまで取られてきた現象を否定して避けるというアプローチは、現象解析以前の狭い視野に基づく反応であった。この対応は現象を扱う際のスケールに依存している。ここでは、現象をどの時間及び空間のスケールで見るとかという点の重要性を、非線形現象を手なずけるという立場で考える。現象を扱う場合に、計測し、モデル化し、更に制御する過程がある。数理モデルで見ると、これらそれぞれに用いたスケールに伴う制約がある。

引原隆士 正員：フェロー 京都大学大学院工学研究科電気工学専攻  
E-mail hikihara.takashi.2n@kyoto-u.ac.jp  
Takashi HIKIHARA, Fellow (Graduate School of Engineering, Kyoto University, Kyoto-shi, 615-8510 Japan).  
電子情報通信学会誌 Vol.98 No.11 pp.1007-1011 2015年11月  
©電子情報通信学会 2015

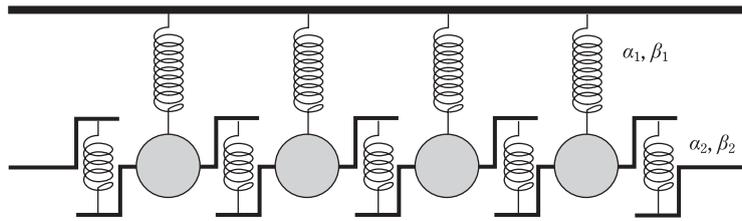


図1 結合非線形振動子系 ソリトン，局在モードの振動が生じることで知られている。 $\alpha_1$ は復元力の一次の係数， $\beta_1$ は三次の係数である。

例として電気電子回路で用いられる半導体スイッチを考える。理想的なスイッチは、断続の時点における切り換わりによる内部の物理現象を生じないものとする。モデルの適用では十分に無視できる。しかし現実の回路では絶縁と電流容量を考慮して半導体の構造が設計されるため、スイッチ素子においては半導体の接合容量、電流路のインダクタンス、抵抗により、素子特性が支配される。その結果、動作速度に応じて無視できない振動が現れる。スイッチの動作を把握する時間の尺度に応じて、スイッチの表現が異なることになる。数理的にもスイッチによる切り換わりを伴う系の厳密な解を表現することは難しい。つまり、単純なスイッチの機能に対しても、多くの表現が存在する。何が本当の現象か、言い換えればスイッチの普遍性とは何か定まらない。解析においては、その非線形性に普遍的なモデルを当てはめる。したがって、その生み出す現象もモデルの記述が表す現象のスケールに依存することになる。

非線形を手なずけることは、その個々のモデルの妥当性や精度を議論することではなく、非線形性を有する系に普遍的な特性に基づいてメカニズムを理解した上で、

## ■ 用語解説

**ソリトン (Soliton)** 孤立した波動 (Solitary Wave) を意味し、その空間的な挙動が、あたかも粒子のような衝突、追い越しなどの現象を示すことから、粒子を表す on の語尾を用いて呼ばれる。光のソリトンは、既に通信にも利用されている。

**エネルギーハーベスティング** 自然に偏在するエネルギーや、拡散した微小なエネルギーを何らかの変換装置を用いて収集する技術。

**結合系** 振動子などの現象や構造の最小要素が、空間的に相互関係を持ってつながった系を総称して結合系と呼ぶことがある。

**エルゴード性 (Ergodicity)** ボルツマンの熱力学の法則により、熱平衡状態に至った系は全ての状態の平均が各状態の時間的平均に等しい。このエルゴード仮説を満たす性質。

**ヒステリシス (Hysteresis)** 材料物性やデバイスの応答特性において現れる履歴特性を指す。外部パラメータの単調な変化に対して、応答が現在のパラメータ値直前の値を保持し、増加時と減少時で異なる特性値を示す。

**Q 値 (Quality factor)** 周期的な外力を与えられた振動子が示す共振現象の鋭さを表す量。

個別の現象への近視眼的な対応ではなく、普遍的な特性の応用を見いだすことにつながる。

## 2.2 回帰性

多数の非線形振動子が相互に非線形特性を有するばねで結合した系を考える (図1)。一つの振動子にゼロでない初期値を与えると、初期値として与えられたエネルギーが多くの要素に拡散した後、再び特定の要素に戻り、初期値と同じような振動で集中することがある。これを回帰現象と呼ぶ。この回帰現象を示す非線形結合振動子に Fermi-Pasta-Ulam (FPU) 系<sup>(3)</sup>がある。この系の回帰現象を調べる中で、孤立波 (ソリトン<sup>(用語)</sup>) が見いだされたことで知られている。一方、この結合振動子においては、局在モード (ILM) と呼ばれる空間的にエネルギーがとどまった波動が存在することも知られている<sup>(4)</sup>。個別に発見されたこれらの波は非線形結合振動子系の多様な共存解の一部で、それらは非線形性を介して相互に状態を入れ替える場合も報告されている。

このように結合された非線形振動子の間で、振動の移動、拡散、集中の特異な現象を示すことは上に述べたが、運動エネルギーが支配する振動の回帰現象がその背後のメカニズムにある。空間に拡散した振動エネルギーが、その後特定の要素に集中する状態は興味深い。拡散したエネルギーが集中することを支配するメカニズムが明らかになると、一旦広がってしまったエネルギーを再度集める方法の開発につながる。これは、昨今興味を持たれている自然に偏在するエネルギーを利用するエネルギーハーベスティング<sup>(用語)</sup>技術と関連がある。現象をベースとした機能性の検討は、非線形振動子の特性や結合を適切に設計に関連付けることができれば、拡散したエネルギーの集中 / 解放の技術につながる<sup>(6),(7)</sup>。

回帰性を時間領域で考えると、うなりを伴う振動状態 (概周期振動) として現れる。無駄時間を含む非線形ばね特性を持つ振子の振動は現象は、無駄時間 (遅れ時間) を位相変数と取って振動発展を書き直すと、非線形の偏微分方程式で近似できる<sup>(5)</sup>。この式は、孤立波を生じる方程式に近似できる。これは、波動の伝搬とその衝突、エネルギーの局在化が、現象が時間的に回帰する非線形振動子の解の過渡的な変化と関連していることを示

唆している。

回帰性という現象の観点から非線形系の現象を見たとき、その機能性をどうやって生み出すことができるのかという興味が生まれる。

### 3. 非線形系統合の方法論へ

#### 3.1 還元論からのアプローチ

非線形な系に対して、個別のミクロなスケールの解を集めても、系の全体の応答を表すことは難しい。解析主体の研究は、既に述べたように見える現象がどの現象の重ね合わせで得られるかという発想に基づき、その時点で非線形系の性質に多くの仮定が必要となる。我々が現象を見るとき、時間変化の中で状態がどのような特徴を示すかを探すが、その際に何らかの成分分解をしながら観察しているわけではない。例えば振動であれば、特徴として、回帰性、対称性、変化の速さ、など変化の特徴から観察する。それは生物としての五感の器官の構造とも合致する。

現象の過渡的な変化にどのような非線形性が影響しているかは、定常状態の解析に基づく解を積み上げては把握できない。システム・回路が定常状態を無視できないくらい逸脱した場合の解は、定常解で考えることに意味がない。したがって、自由度が高いほど数値計算による実験が、現象の理解を進めるのに重要となる。つまり本当に重要なのは、過渡状態の挙動である。無限時間後に定常状態に収束する解を知ることが、現在刻々と変化する現象への対処を求められるとき、有効な対策ではない。

そのような観点を考えるのに適した「可到達性」に基づく「危険集合」の概念がある<sup>(8)</sup>。力学系において、現在の状態は有限時間前の状態が変化してきたものであり、同時に有限時間後には別の状態に至る。全ての状態は現在の状態を初期値として、時間の前方向、後方向に有限時間計算すると、その現在の初期値集合から発展する集合に「含まれる」か「含まれない」かに分類できる。もし将来、接近したくない危険な状態の集合（危険集合）があれば、現在の時点でそこに至る可能性の高い状態を、有限時間後の状態の評価を受けて事前に排除することができる。このように有限時間の範囲の解の分類に基づき、危険集合への到達する集合を求め、更にその補集合を求めると、有限時間では危険集合に至らない解集合が得られる。これは、無限時間後の安定性の十分条件を示すのではなく、定めた有限時間内で安全な必要条件を得る。この議論は、力学系の有限の時間における現実的な理解を与え、制御系の設計に実用的な手法となる。

非線形振動子の結合系<sup>(用語)</sup>はその自由度が高くなると、多様な解（状態）を把握することが難しくなる。そ

れらに対して力学系のエルゴード性<sup>(用語)</sup>に着目した解析方法が提案されている<sup>(9)</sup>。現実の系は数式で定義された確定系ではない。大規模な電力システムのデータ解析<sup>(10)</sup>から、過渡状態を支配する現象の特徴をつかむことができることが示された。これは定常解析に基づく手法ではつかめない現象の変化の兆候を得る手法となり得る。系の様々な非線形性や構造変化の影響を受けた軌道に対して、モデルありきではなく、有限時間のデータから、現象解析の原点に立ち戻った手法を与えている。

これらの非線形系の軌道の時間発展に着目した解析を多くのデータで積み上げることは、還元論に基づく新しいアプローチとなることが期待される。

#### 3.2 保存系からのアプローチ

エネルギー保存則は力学系の基本則である。系の物理量が保存される時、解析的アプローチが容易になる。数学者のRalph Abraham氏がフルブライト財団の助成で来日され、京都大学で講義された。その際に、“保存系の研究をどう思われますか？”という聴講者の質問に対して、“Hopeless!”と断じられた。その意味するところは述べる側と聞く側で当然異なるが、講義のストーリーと具体的な対象を扱う応用数学の観点から、保存系の力学構造の対称性という美しさにとらわれると、散逸的である具体的な系の現象の理解にはとても至らないと示唆されたと筆者は理解している。

工学において複合的な系を設計するにあたり、サブシステムの設計からボトムアップに積み上げることは多い。サブシステムが相互に独立で、蓄積エネルギーから見て受動的である場合、異なる物理量を含んだ系を結合する場合においても、直並列により特性が失われない。これはフィルタなどの設計概念で用いられる線形な系の正実性による重ね合わせと類似の物理的関係を持つ<sup>(11)</sup>。明らかに、これらのサブシステムは相互に独立で協調することはない。非線形系の優位性は、複数の解が共存し、相互に干渉/補完する関係にある。このような特性を生かす設計法に道を開く必要があるのではないだろうか。

複数の解が共存する非線形系の優位性に着目し、その性質を利用するという観点から、応用例を4.に示す。

### 4. 非線形系の統合の実験的試み

筆者の経験から、非線形系の研究としてモデルありきのアプローチをすることを躊躇してきた。指導教授から投げられた「作ったような問題を解くな」という言葉を踏まえ、非線形現象の現象理解を等身大の実験に求めることの重要性をあえて体現してきた。しかし、今、非線形系のアナリシスからシンセシスに向けた研究を始め、その重要性を更に認識している。以下、非線形特性を有

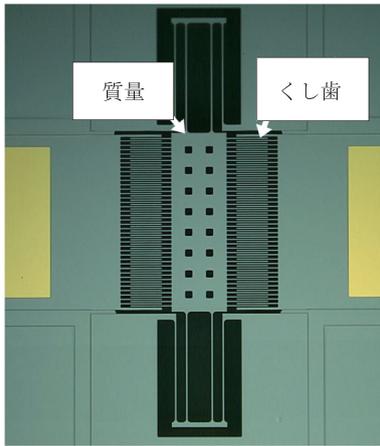


図2 非線形 MEMS 共振器<sup>(12)</sup> 質量部分をくし歯構造のアクチュエータで駆動する構造。

する MEMS デバイスを用いた論理演算系の提案, 高周波スイッチングデバイスを用いた電力パケット伝送系の提案について示し, シンセシスの方向性として考えている視点について少し述べる。

#### 4.1 非線形 MEMS デバイスによる演算

自然にある非線形性を扱うことは, 現象としての非線形性の研究に, ある意味で正当性を与える。逆に, 自然に存在しない要素に与える非線形特性に物理を超えた意味を与えることはできるのだろうか。

微小電磁機械システム (MEMS) は, 減圧環境で Q 値<sup>(用語)</sup> (Quality factor) が高いことから共振器として利用される。図 2 は非線形 MEMS 共振器<sup>(12)</sup> の写真である。質量部分の変位の復元力に, 上下のばねとなるポリシリコンの細いはりの応力特性を用いる。設計によりこのばね特性にヒステリシス<sup>(用語)</sup>特性を発現させることができる。

この MEMS 共振器をくし歯電極に印加する電圧に交流を重畳して励振することができる。その結果, ヒステリシスにより大振幅と小振幅の二つの異なる振動が同じ

励振周波数で共存する。現象理解としてはヒステリシスに伴う分岐や位相空間の構造が対象となる。一方, この 2 状態に論理的意味を与えることができる。その結果, 非線形 MEMS 共振器複数を電氣的に非線形結合し, カウンター動作が実現する<sup>(13)</sup>。また, 単一メモリ素子に演算機能を有する複合デバイスというこれまでの電子素子にはない機能を生み出すことができる<sup>(14)</sup>。この例はほんの一端であるが, 非線形な特性を生かすことの意味を与えている。

#### 4.2 電力パケットのルーチング

パワーエレクトロニクスは, エネルギー蓄積要素であるインダクタとキャパシタのエネルギーを, 回路構成の不連続な切換や, 方向性を与えることで順次移動させ, 任意の量, 形状, 速さで負荷に供給する技術である。この技術に, SiC, GaN などの低損失でかつ高速, 高周波スイッチング可能なデバイスを適用すると, 従来扱えなかったパラメータ領域で回路動作をさせることができる。電力という物理量を伴うペイロードに信号から成る情報タグを物理層で付加してパケット化し, そのタグ情報に基づいて, 線路インピーダンスで決まる流路ではなく, タグにより選択した流路を介して電力を低損失でルーチングできる<sup>(15)</sup>。電力は電源ごとの成分分離ができないため, 時間分割してデジタル化することで区別が可能となる。負荷が要求する電力をパケット化された電力によって実現できることも理論的に保証された<sup>(16)</sup>。

この研究は, エネルギーとエントロピーのトレードオフの関係を踏まえて, 分布する電源と負荷のネットワークを, 電力の上限の制約の下で, 電力を離散的かつ量子的に伝送する方法論を示すことを目的としている (図 3) 独立電源環境に適用されたとき, 電力伝送と ICT の統合を越えたシステム設計の課題となる。この系が持つ機能は, 切換によるハイブリッド性から生まれる非線形性に依存する。ここに提示した研究は, 従来重視する必要のなかった情報と物理量の「同時性」を扱うものであり, Internet of Things (IoT) のテーマとも関係する

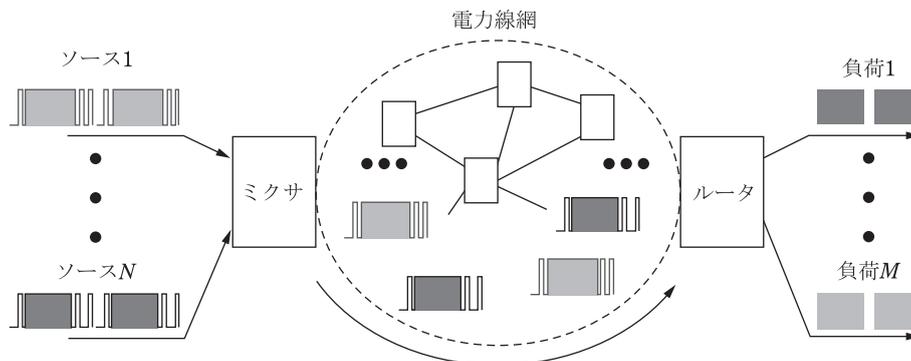


図3 電力のパケット化とルーチング

課題となる。

## 5. おわりに

非線形理論とその応用 (NOLTA) ソサイエティが、電子情報通信学会の新しいソサイエティとして生まれるに至ったこと背景には、これまでの学際的かつ分野横断の研究を、基礎・境界ソサイエティの中で育て、国際的に人を育ててきたことの成果がある。現時点でこのような研究コミュニティが、分野を越えて新たに生まれる動きは既存の学会では絶えて久しい。研究の主人公である研究者自身が、既存の問題を既存の方法でアプローチし、精度を上げて評価を受けるものではなく、これまで学問として成立していなかった概念、捨てられた考えを取り込んで、非線形性に基づいて拡張していくアプローチを、関係者が全力を上げて挑んできた成果である。

長き不況を経て、産業界が、大学・研究機関の研究に効率や有効性を求める圧力を高めている。電子情報通信学会が本ソサイエティの独立を受け入れたことの意味とは、学会がよって立つ概念を根本から覆す可能性のある研究成果を、自らの中に生み出すことを認めたことである。この視点は、本会が意図せず示した卓越した見識である。論文誌 NOLTA, IEICE もオープンアクセス誌として、本会にとどまらず、誌上で研究者のコミュニティを広げている。今後、基礎科学の分野で、サイエンスのオープンソースに基づいて、後継者を育てる魅力のある分野として育っていくことが一層期待される。

## 文 献

- (1) F. Moon, Private communications, 2014.
- (2) Y. Ueda, Road to Chaos, Aerial Press, 1992.
- (3) E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam, "Studies of non linear problems," the American Mathematical Monthly, vol. 74, no. 1, Part I, pp. 490-502, 1967.
- (4) A.J. Sievers and S. Takeno, "Intrinsic localized modes in anharmonic crystals," Phys. Rev. Lett., vol. 61, no. 8, p. 970, 1988.
- (5) T. Hikiyara and Y. Ueda, "An expansion of system with time delayed feedback control to spatio-temporal state space," Chaos, vol. 9, no. 4,

pp. 887-892, 1999.

- (6) M. Kubota, V. Putkradze, and T. Hikiyara, "Energy absorption at synchronization in phase between coupled Duffing systems," International Journal of Dynamics and Control, vol. 3, no. 2, pp. 189-194, 2015.
- (7) M. Kubota, R. Takahashi, and T. Hikiyara, "Active and reactive power in stochastic resonance for energy harvesting," IEICE, Trans. Fundamentals, (accepted).
- (8) C.J. Tomlin, "Hybrid control of air traffic management systems," PhD dissertation, (UC, Berkeley), 1998.
- (9) Y. Susuki and I. Mezic, "Nonlinear Koopman modes and coherency identification of coupled swing dynamics," IEEE Trans. Power Syst., vol. 26, no. 4, pp. 1894-1904, 2011.
- (10) F. Raak, Y. Susuki, T. Hikiyara, H.R. Chamorro, and M. Ghandhari, "Partitioning power grids via nonlinear Koopman mode analysis," 5th IEEE PES Conference on Innovative Smart Grid Technologies (ISGT2014), Washington DC, USA, Feb., 2014.
- (11) R. Ortega, A.J. van der Schaft, I. Mareels, and B. Maschke, "Putting energy back in control," IEEE Control Syst. Mag., vol. 21, no. 2, pp. 18-33, 2001.
- (12) S. Naik, T. Hikiyara, H. Vu, A. Palacios, V. In, and P. Longhini, "Local bifurcations of synchronization in self-excited and forced unidirectionally coupled micromechanical resonators," J. Sound Vib., vol. 331, no. 5, pp. 1127-1142, 2012.
- (13) A. Yao and T. Hikiyara, "Counter operation in nonlinear micro-electromechanical resonators," Phys. Lett. A, vol. 377, no. 38, pp. 2551-2555, 2013.
- (14) A. Yao and T. Hikiyara, "Logic-memory device of a mechanical resonator," Appl. Phys. Lett., vol. 105, 123104, 2014.
- (15) T. Takuno, M. Koyama, and T. Hikiyara, "In-home power distribution systems by circuit switching and power packet dispatching," 1st IEEE International Conference on Smart Grid Communications, pp. 427-430, Maryland, USA, Oct. 2010.
- (16) 縄田信哉, 高橋 亮, 引原隆士, "電力パケットによるエネルギー表現の漸近的性質," 信学論(A), vol. J97-A, no. 9, pp. 584-592, Sept. 2014.

(平成 27 年 5 月 29 日受付 平成 27 年 6 月 17 日最終受付)



ひきはら たかし  
引原 隆士 (正員: フェロー)

1987 京大大学院博士課程単位取得退学。関西大を経て、1997 京大大学院工学研究科助教授、2001 同教授。2012 から図書館機構長。主として非線形系の工学応用に関する研究に従事し、研究対象はナノ・マイクロ系からパワーエレクトロニクス、電力伝送系にわたる。京大工博。2015 本会論文賞、システム制御情報学会学会賞論文賞 (2009, 2013, 2015) Energies, MDPI Best paper award 2015 を各受賞。